BAREM DE CORECTARE – CLASA a VIII – a

SUBIECTUL I – 30 p

a) Dacă $y \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ și $x + 3 = 3y$, arătați că expresia
$E(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{9y^2 - 12y + 4}$ are valoare constantă.

b) Descompuneți în produs de factori ireductibili expresia:
$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) - 3.$

c) Determinați numerele raționale a și b, pentru care :
$a - 1 = 2\left(2a - 3\sqrt{3}\right) + b\sqrt{3} + 8.$

Soluție:

a) $E(x) = \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(3y-2)^2} = 3|y| + |3y - 2|$……..3p
Cum $0 \le y \le \frac{2}{3} \Rightarrow |y| = y$ și $|3y - 2| = -3y + 2$……..4p
$\Rightarrow E(x) = 2$……..3p

b) Notăm $x^2 + 2x$ cu y și expresia devine $y \cdot (y - 2) - 3 = y^2 - 2y - 3$……..3p

$y^2 - 2y - 3 = y^2 - 3y + y - 3 = y(y - 3) + 1(y - 3) = (y - 3)(y + 1)$……..3p

$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1) = (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$……..4p

c) Relația se poate scrie : $3a + 9 = \sqrt{3}(6 - b)$……..3p
Cum a și b sunt raționale $\Rightarrow 6 - b = 0 \Rightarrow 3a + 9 = 0$……..4p
Deci $b = 6$ și $a = -3$……..3p

SUBIECTUL al II-lea – 30 p

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x - 1) = 2x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția și reprezentați-o grafic.
b) Rezolvați ecuația: $f(2x - 1) - f(x - 3) = f(x) + f(x + 1)$.
c) Calculați: $f(3) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{2025}) - 3^{2026}$.

Soluție:

a) Notăm $x - 1 = t$, atunci $x = t + 1$ și , înlocuind în relație, obținem
$f(x) = 2x + 5$……5p
Reprezentarea grafică a funcției f……5p

b) Efectuarea calculelelor $f(2x - 1) = 4x + 3, f(x - 3) = 2x - 1,$
$f(x + 1) = 2x + 7$……..5p
Rezolvarea ecuației si finalizare $x = -4$……5p

c) $f(3) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{2025}) = (2 \cdot 3 + 5) + (2 \cdot 3^2 + 5) +$
$(2 \cdot 3^3 + 5) + \cdots + (2 \cdot 3^{2025} + 5)$……..3p
$= 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2025}) + 5 \cdot 2025$……..2p
$= 2 \cdot \left(\frac{3^{2026} - 1}{3 - 1} - 1\right) + 5 \cdot 2025$……2p

Finalizare: $f(3) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{2025}) - 3^{2026} = 3^{2026} - 1 - 2 +$

$+5 \cdot 2025 - 3^{2026} = 10122$……..4p

SUBIECTUL al III-lea – 30 p

Se consideră cubul $ALGORITM$. Fie E mijlocul segmentului $[AL]$, iar F mijlocul segmentului $[LG]$. Dacă muchia cubului are lungimea $2a. a > 0$, atunci:

a) Arătați că $EG \perp OF$.
b) Calculați sinusul unghiului diedru format de planele (TOF) și (ALG).
c) Arătați că $(GET) \perp (TOF)$.

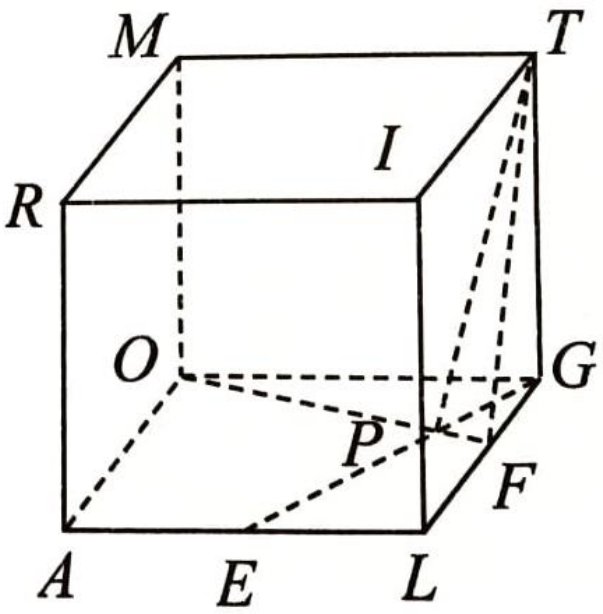
Soluție:

a) Notăm $EG \cap OF = \{P\}$. Cum $\Delta FOG \equiv \Delta EGL$, avem $\sphericalangle OFG \equiv \sphericalangle GEl$. Atunci

$\sphericalangle PFG + (\sphericalangle FGP) = 90^0$ și, deci. $EG \perp OF$……6p

b) Cu T3$\perp \Rightarrow TP \perp OF$……3p
$\Rightarrow \sphericalangle\big((ALG),(TOF)\big) = \sphericalangle(TP, PG) = \sphericalangle TPG$……3p
Se calculează $OF = a\sqrt{5}$, $PG = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$, $TP = \frac{2a\sqrt{30}}{5}$……3p
$sin(\sphericalangle TPG) = \frac{\sqrt{30}}{6}$……3p

c) Conform a) și b) $TP \perp OF$ și $GE \perp OF$. Atunci $OF \perp (GET)$……6p
Dar $OF \subset (TOF)$ și, deci, $(TOF) \perp (GET)$……6p



Orice altă soluție corectă este notată favorabil.