Barem de notare și corectare clasa a V-a

Subiectul 1. (30 puncte)

Fie șirul de numere naturale: $85, 92, 99, 106, \ldots, 2003$.

a) Determinați o regulă generală pentru fiecare termen din șir și apoi determinați câte numere conține șirul.

b) Aflați câte cifre s-au utilizat pentru scrierea numerelor din șir.

c) Precizați care este cifra de pe locul 387 din numărul $859299106113\ldots2003$.

Soluție:

a) $85 = 85 + (1-1)\cdot 7, 92 = 85 + (2-1)\cdot 7, 99 = 85 + (3-1)\cdot 7, \ldots,$

$2003 = 85 + (275-1)\cdot 7$.....**3p**

Regula observată este: $a_n = 85 + (n-1)\cdot 7, \forall\, n \in \mathrm{N}$.....**3p**

Vrem să găsim n, numărul de termeni astfel încât $a_n = 2003$

$85 + (n-1)\cdot 7 = 2003 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow n = 275$ **4p**

b) Numere cu 2 cifre: de la 85 la 99⇒3 numere·2=6 numere.....**2p**

Numere cu 3 cifre: de la 106 la 999⇒128 numere·3=384 numere.....**3p**

Numere cu 4 cifre: de la 1001 la 2003 (dar atenție, nu toate sunt în șir) ⇒ (275-131)·4=576 cifre.....**3p**

Total cifre folosite: 6(2cifre)+384(3cifre)+576(4cifre)=966 .....**2p**

c) Primele 3 numere (2 cifre): $3 \cdot 2 = 6$ cifre.....**1p**

Următoarele 128 numere (3 cifre): $128 \cdot 3 = 384$ cifre.....**1p**

Total după aceste 131 numere: 6 + 384 = 390 cifre.....**1p**

Poziția 387 este în zona celor cu 3 cifre, adică în primele 131 numere.

Poziția 387 - 6 (primele 2 cifre) = 381, deci cifra 381 în zona celor cu 3 cifre

Fiecare număr are 3 cifre → 381:3=127 .....**2p**

Primul număr cu 3 cifre: 106, al 127-lea număr de 3 cifre: a=106+(127−1)·7=106+126·7=106+882=988 .....**2p**

Cifra 381 (adică poziția 387 total) este ultima cifră din numărul 988.....**2p**

Cifra este 8.....**1p**

Subiectul 2. (30 puncte) Fie numerele $a = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{15}, b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{118}$.

a) Calculați numerele a, b și $a - b$.

b) Arătați că numărul $1 + a + b$ este atât pătrat perfect cât și cub perfect.

Soluție

a) $a = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{15} = 2^{2+3+\cdots+15} = 2^{119}$ **5p**

$b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{118} = \cdots = 2^{119} - 1$.....**5p**

$a - b = 2^{119} - 2^{119} + 1 = 1$.....**5p**

b) $1 + a + b = \cdots = 2^{120}$.....**5p**

$2^{120} = (2^{60})^2$.....**5p**

$2^{120} = (2^{40})^3$.....**5p**

Subiectul 3. (30 puncte) Oana, Dana, mama lor, bunica și străbunica au suma vârstelor pătrat perfect, $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre distincte și Oana este sora mai mică a Danei. Ce vârstă are fiecare, dacă sunt îndeplinte simultan toate condițiile:

i) Fiecare vârstă este divizibilă cu 4, iar $\overline{abc} < 200$.

ii) Peste un an, Oana și Dana, cu suma vârstelor egală cu baza pătratului perfect.

iii) Când Dana avea 4 ani, mama ei avea jumătate din vârsta actuală a bunicii.

iv) Suma vârstelor Oanei, Danei, mamei și bunicii este egală cu vârsta pe care o va avea străbunica peste 4 ani.

Soluție

$\overline{abc} < 200$ și pătrat perfect$\Longrightarrow \overline{abc} = \{100, 121, 144, 169, 196\}$.....**2p**

a, b, c-cifre diferite$\Longrightarrow \overline{abc} = \{169, 196\}$.....**2p**

Notăm cu o vârsta Oanei, cu d vârsta Danei, cu m vârsta mamei, cu b vârsta bunicii și cu s vârsta străbunicii.

I. $\overline{abc} = 169\ deci\quad o + d + m + b + s = 169$, dar vârstele fiind divizibile cu 4 și rezultatul sumei trebuie să fie divizibil cu 4, în acest caz 169 nu este divizibil cu 4, ceea ce nu corespunde cerințelor problemei .,.....**6p**

II. $\overline{abc} = 196\ , deci\quad o + d + m + b + s = 196$

$(o + 1) + (d + 1) = 14 \Longrightarrow o + d = 12 \Longrightarrow \begin{cases} o = 4 \\ d = 8 \end{cases}$ **3p**

$m - 4 = \frac{b}{2} \Longrightarrow b = 2m - 8$ **3p**

$o + d + m + b = s + 4\ şi\ o + d = 12\ avem\ că\ m + b = s - 8$ **3p**

$dar\ m + b + s = 196 - 12 = 184 \Longrightarrow s = 96$ **3p**

$b = 56$ **2p**

$m = 32$ **2p**

$o = 14, d = 8, m = 32, b = 56, s = 96$ **2p**

Se verifică condițiile și se trag concluziile.....**2p**

Orice soluție corectă se punctează corespunzător!