CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 7$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{4-x}{2}$.

- **a)** Reprezentați cele două funcții în același sistem de axe de coordonate xOy.
- **b)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.
- **c)** Demonstrați că dreptele care reprezentă grafic funcțiile sunt perpendiculare.

a) Reprezentarea grafică a funcției f 8p
Reprezentarea grafică a funcției g 8p
b) Scrierea ecuațiilor rezultate din condițiile $P(a, b)$ se află pe ambele grafice 2p
Punctul de intersecție este $P(-2; 3)$ 6p
c) Determinarea punctelor M, respectiv N de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g cu axa ordonatelor. (sau punctele de intersecție cu axa absciselor) 2p
Determinarea lungimilor MP și NP 2p
Verificarea relației $MN^2 = MP^2 + NP^2$ și concluzia 2p

SUBIECTUL II

Fie $E(x) = \left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2x-\sqrt{2}\right)^2 - (2x+3)\cdot(2x-1) - x - 7$, unde x este număr real.

- **a)** Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
- **b)** Determinați valoarea minimă a expresiei.
- **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $E(n)$ este număr prim.

a) Efectuarea calculelor $\left(x+2\sqrt{2}\right)^2$, $\left(2x-\sqrt{2}\right)^2$, $(2x+3)\cdot(2x-1)$ 10p
Finalizare, $E(x) = x^2 - 5x + 6$ 4p
b) Scrierea expresiei sub forma $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ 6p
Valoarea minimă este $-\dfrac{1}{4}$ 2p
c) Scrierea expresiei sub forma $E(n) = (n-3)\cdot(n-2)$ 2p
Dacă $E(n)$ este număr prim, atunci factorii $n-3$ și $n-2$ pot fi doar -1 sau 1 .... 2p
Analizarea cazurilor obținute din condiția anterioară, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ și $n = 4$ 2p
$E(n)$ este număr prim pentru $n \in \{1, 4\}$ 2p

SUBIECTUL III

Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

a) Demonstrați că tetraedrul $BACB'$ poate fi privit ca o piramidă regulată și aflați distanța de la punctul B la planul (ACB').

b) Dacă punctul Q este centrul feței $BB'C'C$, arătați că dreptele AQ și BD' sunt concurente într-un punct P, astfel încât $BD' = 3 \cdot BP$.

c) Aflați măsura unghiului dintre planele (APB) și (APC).

(*Gazeta matematică, enunț modificat*)

a) Baza piramidei $BACB'$ este triunghiul echilateral ACB' de latură $a\sqrt{2}$ 2p

Muchiile laterale BA, BC și BB' sunt congruente, deci piramida $BACB'$ este regulată 2p

Distanța de la B la planul (ACB') este înălțimea piramidei regulate $BACB'$ 2p

$d(B, (ACB')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ 4p

b) Deoarece muchiile AB și $C'D'$ sunt paralele și congruente, $ABC'D'$ este paralelogram 2p

$ABQD'$ este trapez cu diagonalele AQ și BD', deci AQ și BD' sunt concurente 2p

Din teorema fundamentală a asemănării aplicată în triunghiul APD' cu paralela BQ, se obține $\dfrac{BP}{PD'} = \dfrac{1}{2}$, de unde deducem $\dfrac{BP}{BD'} = \dfrac{1}{3}$, respectiv $BD' = 3 \cdot BP$ 6p

c) Se demonstrează că punctul P este centrul triunghiului echilateral ACB' 2p

BP este înălțimea piramidei regulate $BACB'$ 2p

$BP \perp (APC)$ și $BP \subset (APB) \Rightarrow (APC) \perp (APB)$ 4p

Măsura unghiului dintre plane este de 90° 2p

Orice soluție corectă se punctează corespunzător!