CLASA a-VI-a - BAREM

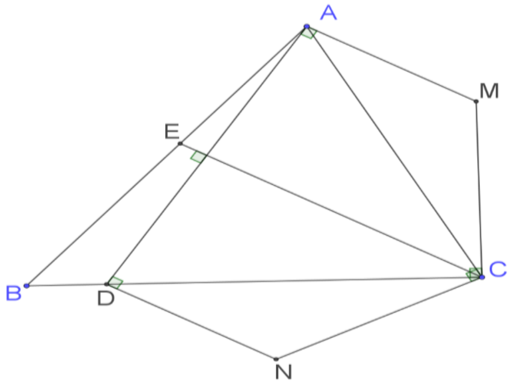
(10p) din oficiu

***Subiectul I.* (30p)** În triunghiul ΔABC, cu m($\sphericalangle BAC$)$< 90°$, se consideră bisectoarea *(CE* a unghiului $\sphericalangle BCA$ și perpendiculara din *A* pe această bisectoare intersectează latura *BC* în punctul *D*. Știind că perpendicularele în *A* și în *C* pe *AD* și respectiv pe *BC* se intersectează în punctul *M*, iar perpendicularele în *D* și în *C* pe *AD* și respectiv pe *AC* se intersectează în punctul *N*, arătați că:

a) $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CDN$

(10p) *b)* $[ND] \equiv [AM]$

(10p) *c)* $[NA] \equiv [DM]$



ΔACD isoscel *(CE* este și bisectoare și înălțime	5p
Deci, $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DAC$ și cum $AM \perp AD$ și $DN \perp AD$, rezultă $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CDN$	5p
$\sphericalangle DCN \equiv \sphericalangle ACM$ deoarece au același complement $\sphericalangle ACD$	5p
$\Delta ACM \equiv \Delta DCN$ conform cazului *U.L.U.* de unde rezultă b*)* $[ND] \equiv [AM]$	5p
$\Delta ADN \equiv \Delta DAM$ conform cazului *C.C.* de unde rezultă c*)* $[NA] \equiv [DM]$	10p

***Subiectul II.* (30p)** Se consideră ecuația: $n^3=n+2p^4+2022$, unde $n \in \mathbb{N}$ și *p* este număr prim. Arătați că:

a) n^3-n este divizibil cu 3, pentru orice număr natural *n;*

b) determinați numărul prim *p;*

c) Determinați numărul natural *n.*

Demonstrarea că n^3-n este un multiplu de 3	10p
2022 este divizibil cu 3	3p
$2p^4$ este divizibil cu 3 și cum (2,3)=1 și *p* este număr prim, rezultă $p=3$	7p
Înlocuim *p* în relația din problemă: $n^3-n=2184=12\cdot13\cdot14$	3p
Dar, $n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$, rezultă $n=13$.	7p

***Subiectul III.* (30p)** Se consideră mulțimea $A=\{\frac{75}{29};\frac{76}{30};\frac{77}{31};\ldots\frac{2022}{1976}\}$.

a) Determinați *card A;*

b) determinați numărul natural *n* pentru care $\frac{75+n}{29+n} \in \mathbb{N}$*;*

c) Determinați elementele mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

Elementele mulțimii *A* sunt de forma: $\frac{75+n}{29+n}$, unde $n=\overline{0,1947}$	10p
$\frac{75+n}{29+n} \in \mathbb{N}$, rezultă $\begin{cases} 29+n \,/\, 75+n \\ 29+n \,/\, 29+n \end{cases}$	3p
$29+n \,/\, 46, 29+n$ *este un divizor al lui* $46, 29+n \in \{1;2;23;46\}$	7p
Finalizare: $n=17$ și deci $A \cap \mathbb{N}=\{2\}$	10p

Orice soluție corectă se punctează corespunzător!