BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE
CLASA a V – a

START SPRE PERFORMANȚĂ 2026

Subiectul I (30 puncte)

Se consideră numărul $x = \frac{12}{13} + \frac{1212}{1313} + \frac{121212}{131313}$ și y definit prin relația:

$\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{303} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{30\ldots03}_{n\ zerouri}}\right) : y = \frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{10\ldots01}_{n\ zerouri}}$.

a) Calculează x;

b) Calculează y;

c) Arătați că numărul $13xy$ poate fi scris ca suma dintre pătratul și cubul aceluiași număr natural.

Soluție:

a) $x = \frac{12}{13} + \frac{1212^{(101}}{1313} + \frac{121212^{(10101}}{131313}$ 4p

$x = \frac{12}{13} + \frac{12}{13} + \frac{12}{13}$ 3p

$x = \frac{36}{13}$ 3p

b) $y = \left(\frac{1}{33} + \frac{1}{303} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{30\ldots03}_{n\ zerouri}}\right) : \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{10\ldots01}_{n\ zerouri}}\right)$ 4p

$y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{10\ldots01}_{n\ zerouri}}\right) : \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{10\ldots01}_{n\ zerouri}}\right)$ 3p

$y = \frac{1}{3}$ 3p

c) $13xy = 13 \cdot \mathbf{\frac{36}{13}} \cdot \mathbf{\frac{1}{3}}$ 3p

$13xy = \frac{36}{3} = 12$ 3p

$12 = n^2 + n^3, 12 = 4 + 8,\ deci\ \ 12 = 2^2 + 2^3,$ 4p

Subiectul al II-lea (30 puncte)

Se consideră suma $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2026}$.

a) Arătați că $S + 1$ este putere a lui 2;

b) Determinați ultima cifră a sumei S.

Soluție:

a) $2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2027}$ 5p

$2S - S = 2^{2027} - 2^0, S = 2^{2027} - 1$ 5p

$S + 1 = 2^{2027}$ 5p

b) Se notează $u(S)$ ultima cifră a sumei S 1p

Se observă $u(2^1) = 2, u(2^2) = 4, u(2^3) = 8, u(2^4) = 6, u(2^5) = 2, etc.$ 6p

Ultima cifră se repetă din 4 în 4, astfel $u(S) = u(2^{2027} - 1) = u(2^{4 \cdot 506 + 3} - 1)$

$= u(2^3 - 1) = u(8 - 1) = 7$ 8p

Subiectul al III-lea (30 puncte)

Aflați numărul natural $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024$.

(Gazeta 10/2024)

Soluție:

$\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024 \Leftrightarrow 10\overline{abc} + d - 2\overline{abc} = 2024$ 5p

$8\overline{abc} + d = 2024 \Leftrightarrow 8\overline{abc} + d = 8 \cdot 253 \Rightarrow d \in \{0, 8\}$ 9p

Dacă $d = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 253 \Rightarrow \overline{abcd} = 2530$ 7p

Dacă $d = 8 \Rightarrow 8\overline{abc} = 2016 \Rightarrow \overline{abc} = 252 \Rightarrow \overline{abcd} = 2528$ 7p

$\overline{abcd} \in \{2530, 2528\}$ 2p

Oficiu 10p

Notă: orice altă rezolvare corectă, se va nota corespunzător.

START SPRE PERFORMANȚĂ 2026